

استجابة الجمل وحيدة درجة الحرية للاثارة الدورية

# RESPONSE Of SDOF System To Periodic Excitation

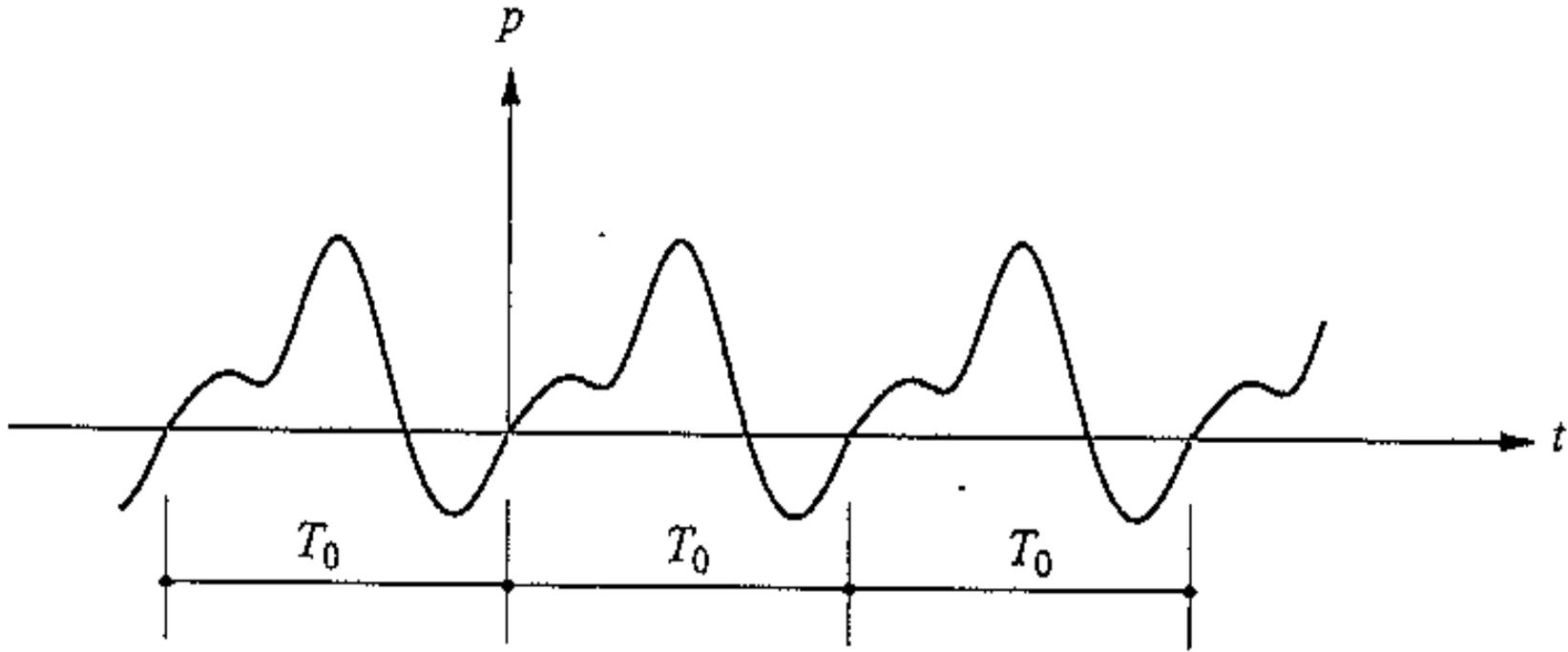
## Lecture 8

dr. Hala Hasan  
dr.hala61@gmail.com

## مقدمة

التابع الدوري هو التابع الذي يكرر فيه الجزء  $T_0$  نفسه عدد غير محدود كما في الشكل اللاحق. العديد من القوى هي دورية أو تقريباً دورية . تحت تأثير ظروف محددة فإن:

- القوى المسيرة للسفينة و الأمواج المحمولة على الشواطئ البعيدة
- وكذلك قوى الرياح الدوامية التي تقتلع المنشآت العالية والنحيفة تعتبر تقريباً دورية .
- الحركات الزلزالية الأرضية لا تشبه التوابع الدورية .
- إن اثاره القاعدة المرتفعة من السيارة المتحركة على طريق مرتفع مقرر بسبب الزحف طويل الأمد يمكن اعتبارها تقريباً دورية .

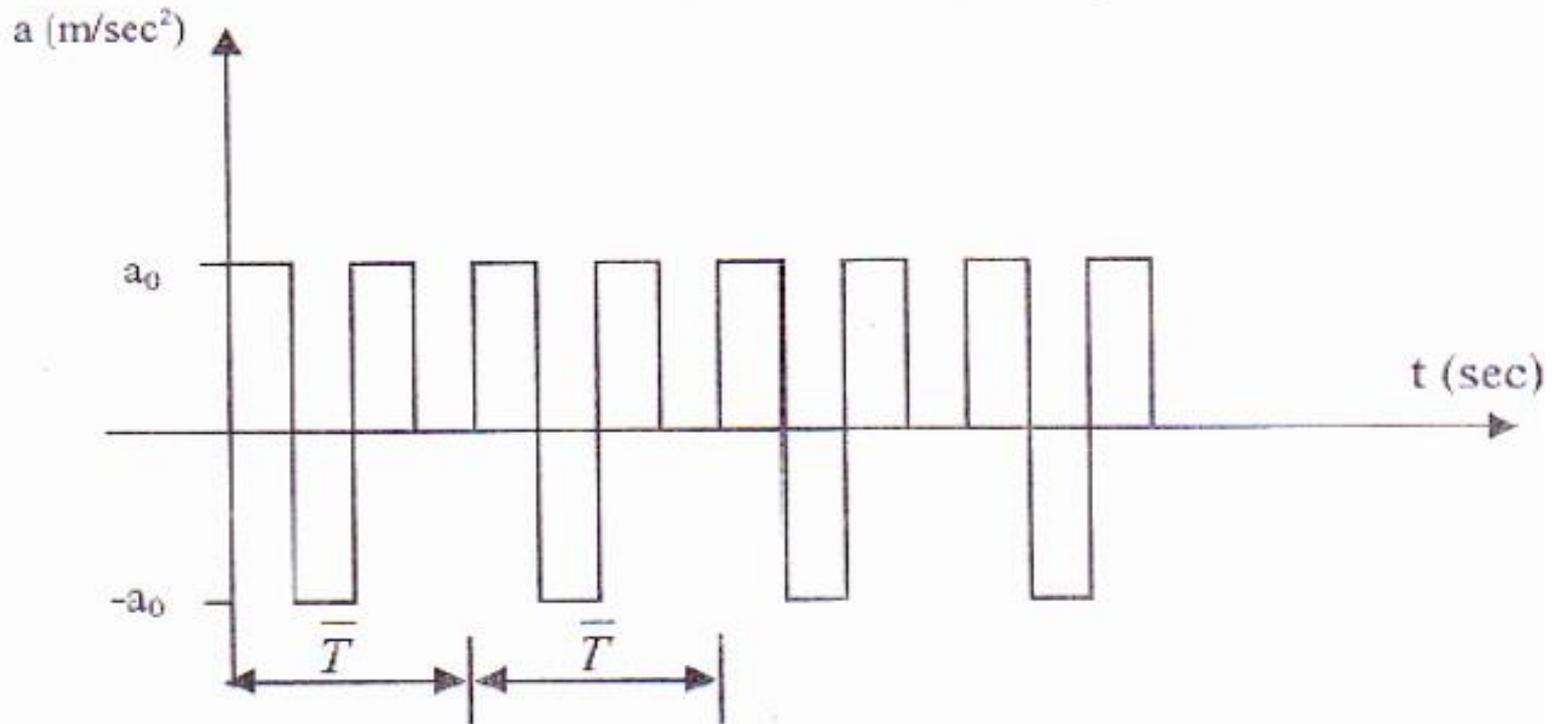


## الشكل (1): الإثارة الدورية

ملاحظة:

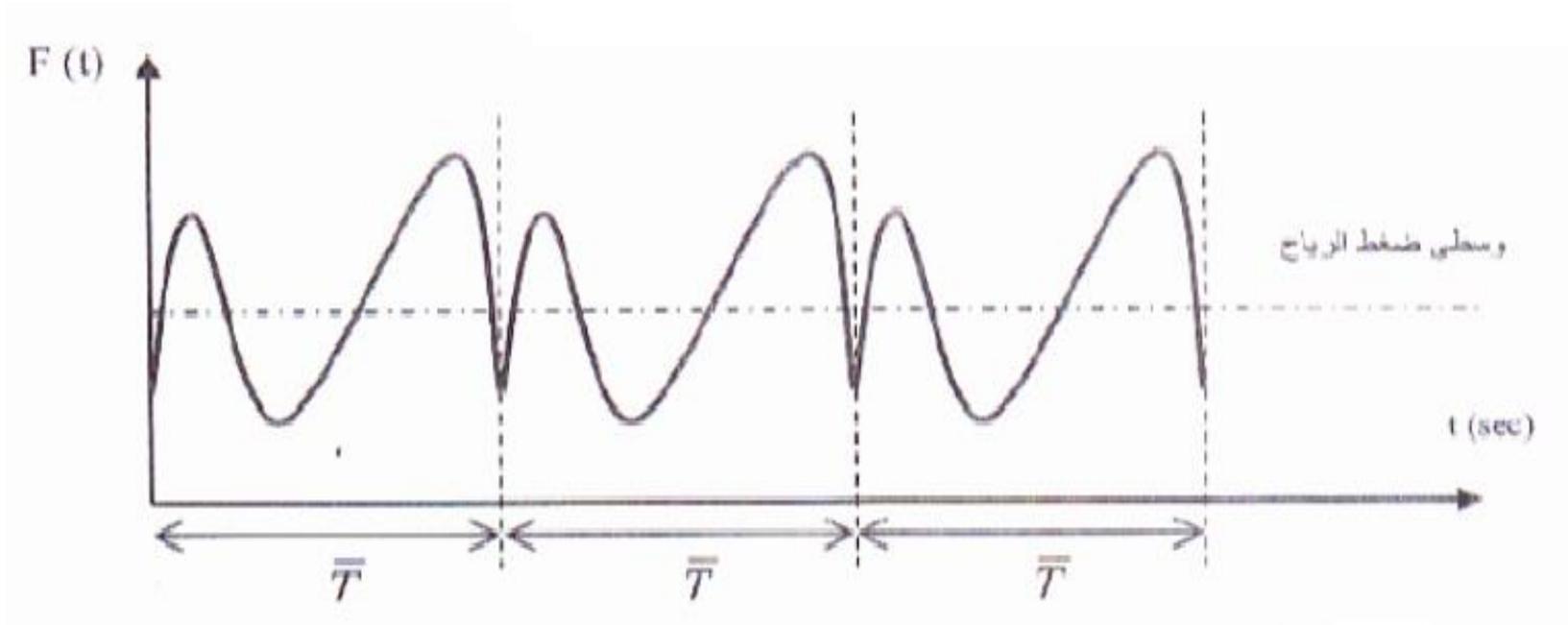
يمكن أن إجراء التحليل للإشارات العشوائية بالاستفادة من تقنيات تحويل فورييه المشروحة في الملحق A من شوبرا

هذا ويمكن ان تكون الاحمال الديناميكية ممثلة بتحريض على الاساس عن طريق تابع دوري للتسارع مع الزمن والذي يمكن تحويله الى قوة مكافئة على المنشأ، وستكون حتما دورية، كما هو مبين في الشكل (1)، (2)  
ان تابع التحريض في الشكل يمكن تمثيله بتابع دوري مع الزمن



الشكل(2): تحريض دوري على الاساس مكرر خلال جزء من الدور الزمني

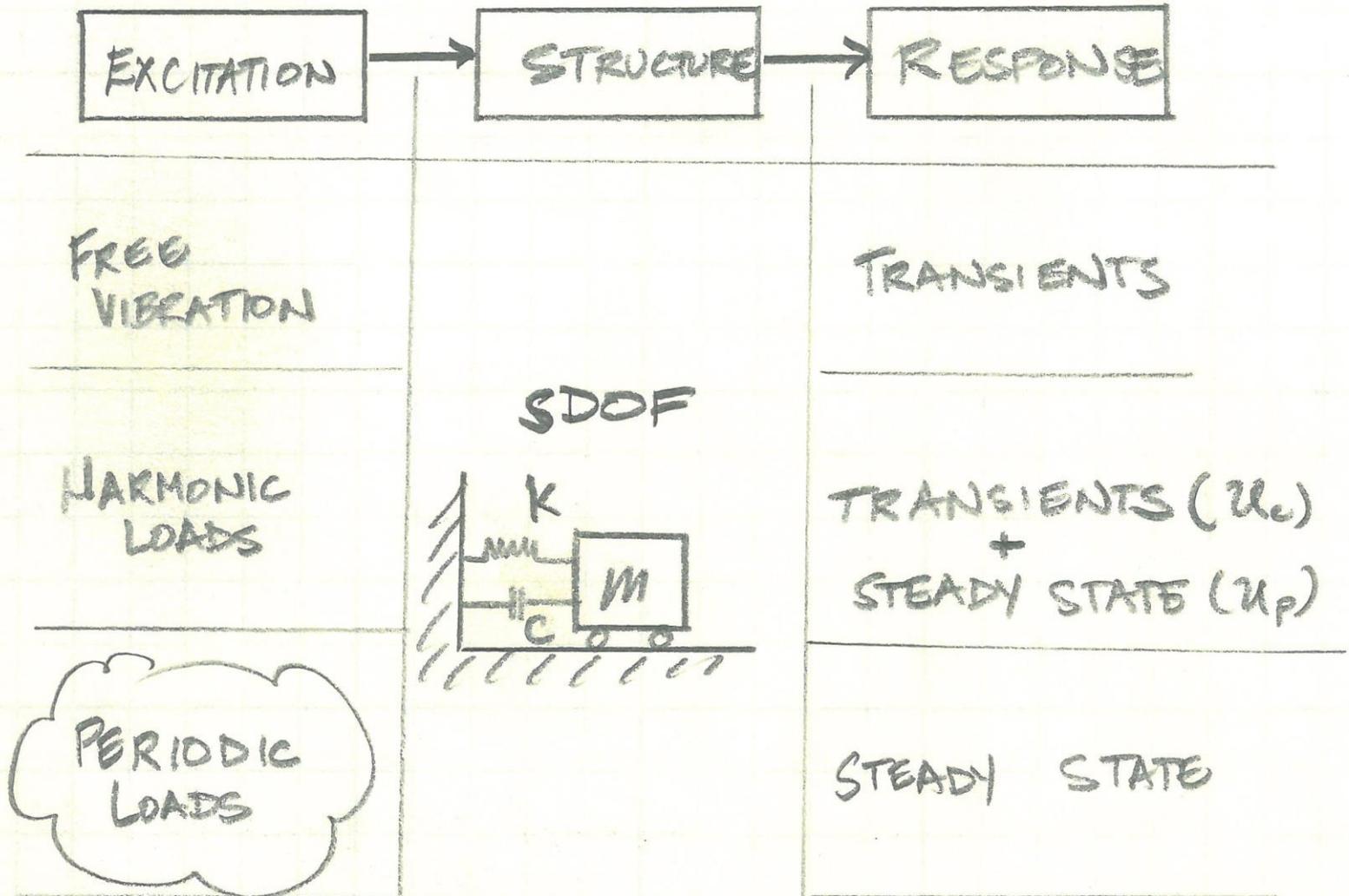
هذا ويمكن ان تكون الاحمال الديناميكية ممثلة بتحريض على المنشأ عن طريق تابع دوري كقوة مع الزمن، كما هو مبين في الشكل (3) ، كتأثير الرياح على المنشآت والتي يتراوح دورها الزمني ما بين 10-50 sec ان تابع التحريض في الشكل يمكن تمثيله بتابع دوري مع الزمن



الشكل (3): تحريض دوري يمثل ضغط الرياح مكرر خلال الدور الزمني للتحريض

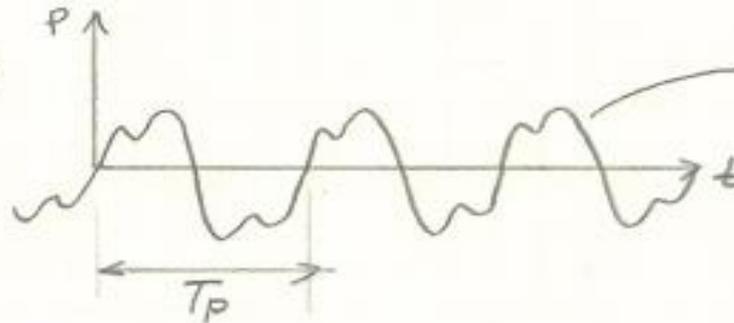
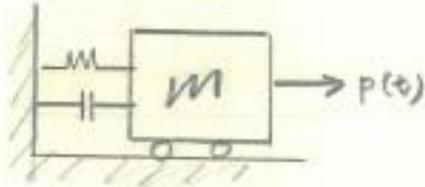
ولعل هذا النوع من المسائل تعتمد على ما توصل اليه العالم Fourier اذا وجد انه يمكن تمثيل التابع الدوري بمجموع لا متناه من التوابع ذوات الحدود  $\sin$  ,  $\cos$  اي يمكن تمثيل التابع الدوري بسلسلة لا متناهية

# Periodic Loads



## PERIODIC LOADS

ANY PERIODIC FUNCTION CAN BE WRITTEN AS A FOURIER SERIES (SUM of  $\infty$  # of SIN & COS FUNCTIONS)



$$p(t) = p(t + T_P j)$$

$$p(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j \omega_p t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j \omega_p t)$$

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_P}$$

Mathematical  
Formulation  
of  
Fourier  
Series

$$a_0 = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} p(t) dt ; a_j = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P} p(t) \cos j \omega_p t dt$$

$$; b_n = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P} p(t) \sin j \omega_p t dt$$

# تمثيل سلاسل فورييه

يكون التابع  $p(t)$  دوري ذو الدور  $T_0$  إذا حقق شكل العلاقة التالية:

$$P(t + jT_0) = p(t)$$

حيث:

$$j = -\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

يمكن تقسيم التابع الدوري إلى مركباته التوافقية باستخدام سلاسل فورييه

$$p(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega_0 t) \quad (3.12.1)$$

حيث أن تواتر الاثارة التوافقية الأساسية هو:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.12.2)$$

يمكن التعبير عن العوامل في سلاسل فورييه بالحد  $p(t)$  وذلك لأن

توابع الجيب و التجيب متعامدة .

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt \quad (3.12.3)$$

$$a_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \cos(j\omega_0 t) dt \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12.4)$$

$$b_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \sin(j\omega_0 t) dt \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12.5)$$

العامل  $a_0$ : هو القيمة الوسطية لـ  $p(t)$  ويمكن اعتبارها القيمة العظمى للقوة الستاتيكية.

العامل  $a_j$ : تمثل القيمة العظمى للقوة التوافقية  $j$  ذات التواترات  $j\omega_0$  وتعادل  $p_0$  لتابع  $\cos$

العامل  $b_j$ : تمثل القيمة العظمى للقوة التوافقية  $j$  ذات التواترات  $j\omega_0$  وتعادل  $p_0$  لتابع  $\sin$

نظرياً فإن عدد غير محدود من الحدود لسلاسل فورييه يلزم للوصول لقيمة  $p(t)$  . عملياً فإن عدد قليل من الحدود كاف للحصول على تقريب جيد .

عند عدم الاستمرارية فإن سلاسل فورييه تقترب من القيمة الوسطية للقيم المباشرة لليمين أو اليسار من عدم الاستمرارية .

حيث:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

الزاوية السرعة (للقوة الدورية )  
دور القوة الدورية  $T_0$

حدود التكامل فتحدد حسب طبيعة القوة ودورها الزمني فمثلا:

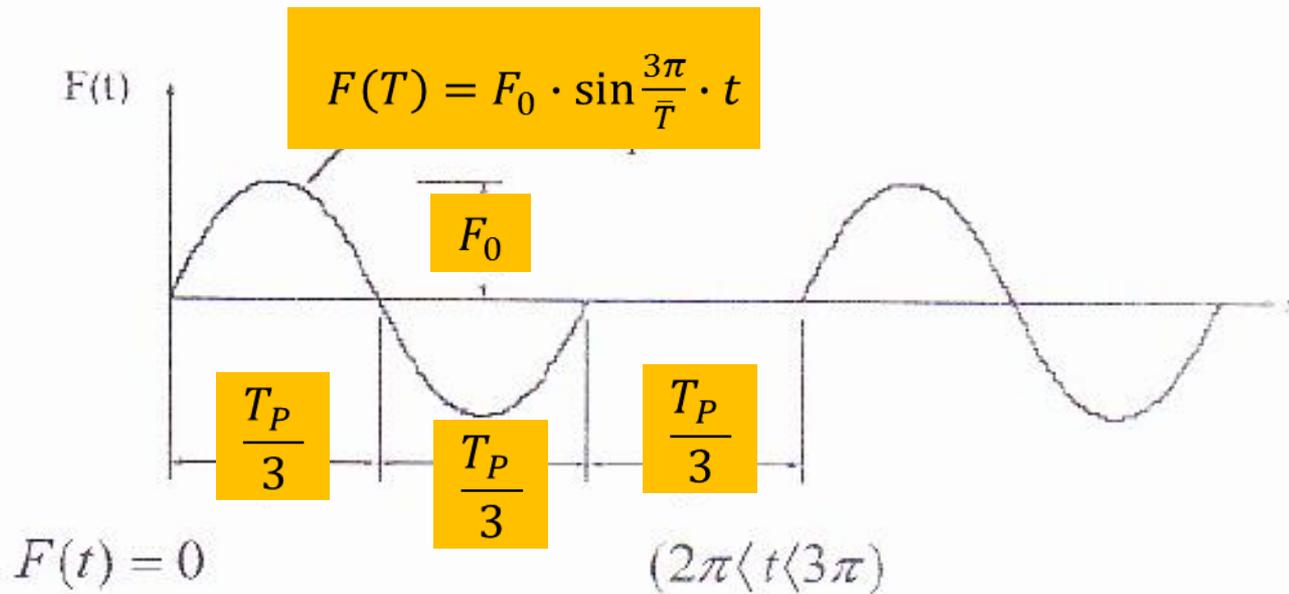
$t_1$  يمكن ان تاخذ قيمة 0 او  $\frac{T_0}{2}$  او  $\frac{-T_0}{2}$  او T او -T  
اما  $t_2$  فيضاف الى  $t_1$  دور كامل

**J** وتاخذ قيم عددية 1،2،3،4،.. تمثل عدد حدود سلسلة Fourier المستخدمة للوصول الى الحل الاقرب من الحل الدقيق ويمكن اعتماد خمسة حدود فعله او ستة غير معدومة

$$\beta_j = \frac{j\omega_0}{\omega_n} = \frac{\omega}{\omega_n}$$

فمثلاً في الشكل نجد تحريضاً دورياً خلال الدور الزمني  $\bar{T}$ ، حيث يتم تقسيمه إلى جزأين، الجزء الأول: يكون فيه التحريض كتابع جيبي، والجزء الآخر معدوم، كما هو موضح في العلاقات التالية:

$$F(t) = F_0 \sin \frac{3\pi}{\bar{T}} t \quad (0 < t < 2\pi)$$



الشكل : تحريض دوري، يمثل ضغط الرياح، مكرر خلال جزء من الدور الزمني:

استجابة منشا وحيد درجة الحرية للاحمال الدورية – بدون تخامد

RESPONSE TO PERIODIC FORCE-no damping

والإثارة دورية تعني ضمنا أن الإثارة موجودة لفترة طويلة، وهو

الوقت الذي قد تتفانى فيه الاستجابة العابرة المرتبطة بالانتقال

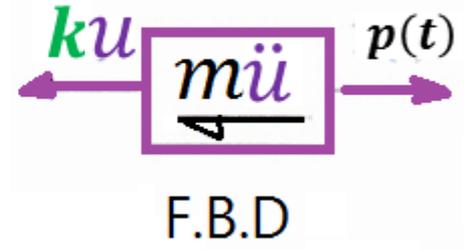
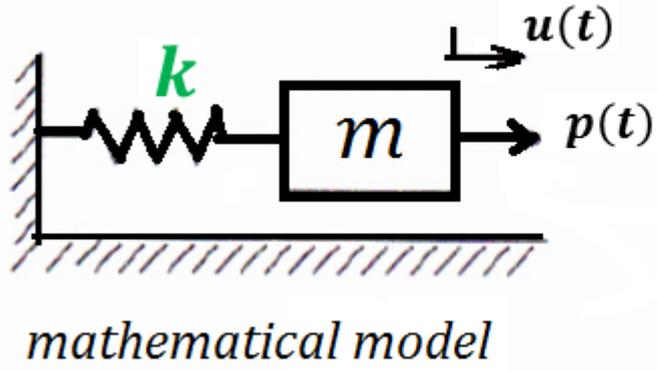
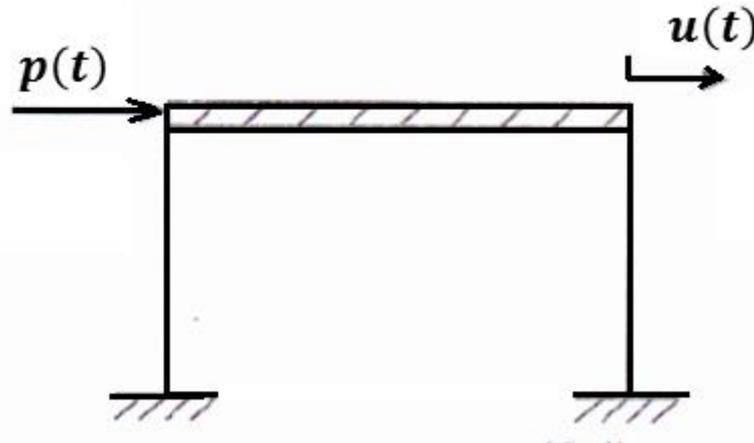
الأولي والسرعة الاولية، وبالتالي نهتم فقط من أجل الاثارة

التوافقية بايجاد الاستجابة الثابتة.

يمكن تحديد استجابة الجمل الخطية للقوة الدورية بتركيب

الاستجابات للاثار الفردية باستخدام سلاسل فورييه .

- باعتبار الاطار المبين في الشكل والخاضع لحمل ديناميكي دوري  $p(t)$  ، والنموذج الرياضي ومخطط الجسم الطليق موضح في الشكل



وفي هذه الحالة معادلة الحركة من الشكل اذا كان الحمل  $\sin$

$$m\ddot{u} + ku = p(t) \Rightarrow m\ddot{u} + ku = p_0 \sin(\omega t)$$

وفي هذه الحالة يوجد حلين للمعادلة حل خاص وحل متمم

The particular solution to this differential equation is:

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_n}\right)^2\right)} \sin \bar{\omega} t \quad \bar{\omega} \neq \omega_n$$

The complementary solution

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

وبإيجاد حل المعادلة التفاضلية باهمال الحل المتمم

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - (\bar{\omega}/\omega_n)^2} \cdot \sin \bar{\omega} t$$

وقد تم تحديد قيمة  $p(t)$  بالعلاقة التالية وفق مبدأ تنضد الاثار للمعادلة التفاضلية بدون تخامد

$$p(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega_0 t)$$

حيث:  $\beta_j = \frac{j\omega_0}{\omega_n} = \frac{\omega}{\omega_n}$

ان الاستجابة المستقرة لجملة وحيدة درجة الحية غير مخمدة والناجمة عن حد تجيبي من السلسلة  $p(t) = a_j \cos(j\omega_0 t)$  تعطى بالعلاقة :

$$u_j^c(t) = \frac{a_j}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta_j^2} \cdot \cos j\omega_0 t \quad u(t) = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - (\bar{\omega}/\omega_n)^2} \cdot \sin \bar{\omega} t$$

الاستجابة المستقرة لجملة وحيدة درجة الحية غير مخمدة والناجمة عن حد جيبي من السلسلة  $p(t) = b_j \sin(j\omega_0 t)$  تعطى بالعلاقة :

$$u_j^s(t) = \frac{b_j}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta_j^2} \cdot \sin j\omega_0 t$$

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j^c(t) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j^s(t) \quad (3.13.5)$$

$$u(t) = \frac{1}{k} \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \beta_j^2} (a_j \cos j\omega_0 t + b_j \sin j\omega_0 t) \right]$$

فإن الاستجابة الثابتة للجمل وحيدة درجة الحرية ذات التخميد اللزج للقوة التوافقية التجيبية  $p(t) = a_j \cos(j\omega_0 t)$  تعطى بالمعادلات (3.2.3) و (3.2.26) مع استبدال  $\omega$  بـ  $j\omega_0$

$$u_j^c(t) = \frac{a_j}{k} \cdot \frac{2\zeta\beta_j \sin(j\omega_0 t) + (1 - \beta_j^2) \cos(j\omega_0 t)}{(1 - \beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2} \quad (3.13.2)$$

حيث:

$$\beta_j = \frac{j\omega_0}{\omega_n} \quad (3.13.3)$$

بشكل مشابه، تعطى الاستجابة الثابتة للجمل للقوة الجيبية  $p(t) = b_j \sin(j\omega_0 t)$  بالمعادلات (3.2.3) و (4.2.3) مع استبدال  $\omega$  بـ  $j\omega_D$

$$u_j^s(t) = \frac{b_j}{k} \cdot \frac{(1 - \beta_j^2) \sin(j\omega_0 t) - 2\zeta\beta_j \cos(j\omega_0 t)}{(1 - \beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2} \quad (3.13.4)$$

إذا كان  $\xi = 0$  و  $\beta_j = 1$  فإن الاستجابة الثابتة تكون غير محدودة وغير هامة وذلك لأن الاستجابة العابرة لا تتفانى (انظر المقطع 1.3): فيما يلي سنفترض أن  $\zeta \neq 0$  و  $\beta_j \neq 1$ .

الاستجابة الثابتة للجمل مع التخميد للاثارة الدورية  $p(t)$  هي تراكم من الاستجابات للحدود الفردية في سلاسل فورييه

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j^c(t) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j^s(t) \quad (3.13.5)$$

باستبدال المعادلات (1.13.3) و (2.13.3) و (4.13.3) بالمعادلة (5.13.3) نحصل على :

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{(1 - \beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2} \{ [a_j(2\zeta\beta_j) + b_j(1 - \beta_j^2)] \sin j\omega_0 t + [a_j(1 - \beta_j^2) - b_j(2\zeta\beta_j)] \cos j\omega_0 t \} \quad (3.13.6)$$

إن الاستجابة  $u(t)$  هي تابع دوري للدور  $T_0$ .

تعتمد المساهمات النسبية للحدود التوافقية المختلفة في المعادلة (3.13.6) على عاملين اثنين :

(1) المطالين  $a_j$  و  $b_j$  للمركبات التوافقية للتابع القسري  $p(t)$ .

(2) نسبة التواتر  $\beta_j$ .

سوف تسيطر المركبات التوافقية هذه على الاستجابة حيث تقترب  $\beta_j$  من الواحد

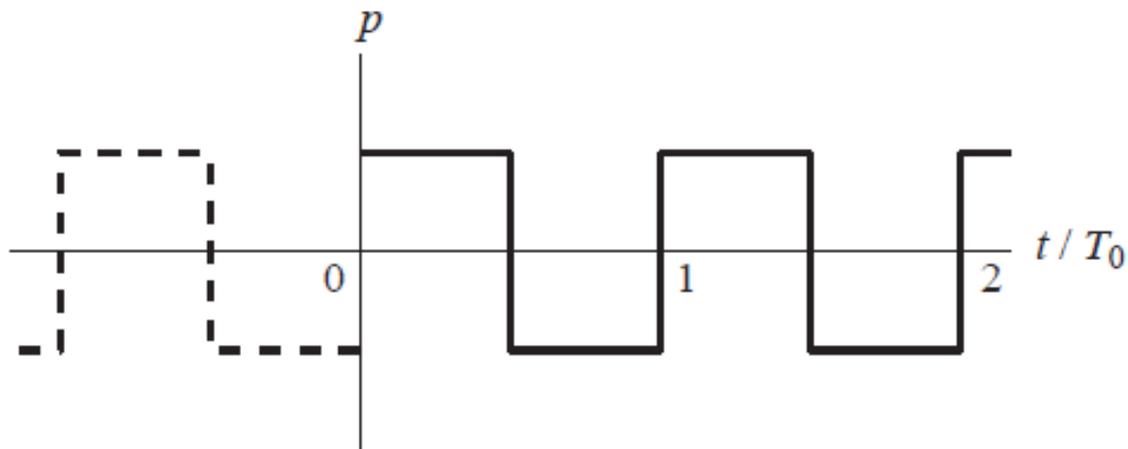
(على سبيل المثال فإن التواتر القسري  $j\omega_0$  يقترب من التواتر الطبيعي (انظر الشكل 3.2.6)

❖ إشارة إلى أن  $u_0$  المستخدم هنا يتضمن اللاحقة صفر المنسجمة مع  $a_0$ . يجب أن لا نخلط ذلك مع  $u_0$  مع اللاحقة (0) المستخدم سابقاً لتدل على القيمة الأعظمية لـ  $u(t)$ .

## Example

القوة الدورية المبينة لاشكل E3.8 تعطى بـ

$$p(t) = \begin{cases} p_0 & 0 \leq t \leq T_0/2 \\ -p_0 & T_0/2 \leq t \leq T_0 \end{cases} \quad (a)$$



(a)

**Figure E3.8**

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt = 0 \quad (b)$$

$$a_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \cos(j\omega_0 t) dt$$

لأنه التكامل من 0 إلى 2π سينتج 0

$$a_j = \frac{2}{T_0} \left[ p_0 \int_0^{T_0/2} \cos(j\omega_0 t) dt + (-p_0) \int_{T_0/2}^{T_0} \cos(j\omega_0 t) dt \right] = 0 \quad (c)$$

$$b_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \sin(j\omega_0 t) dt$$

$$b_j = \frac{2}{T_0} \left[ p_0 \int_0^{T_0/2} \sin(j\omega_0 t) dt + (-p_0) \int_{T_0/2}^{T_0} \sin(j\omega_0 t) dt \right]$$

$$= 0$$

$$b_j = \begin{cases} 0 & j \text{ even زوجي} \\ \frac{4p_0}{j\pi} & j \text{ odd فردي} \end{cases} \quad (d)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt \quad (3.12.3)$$

$$a_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \cos(j\omega_0 t) dt \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12.4)$$

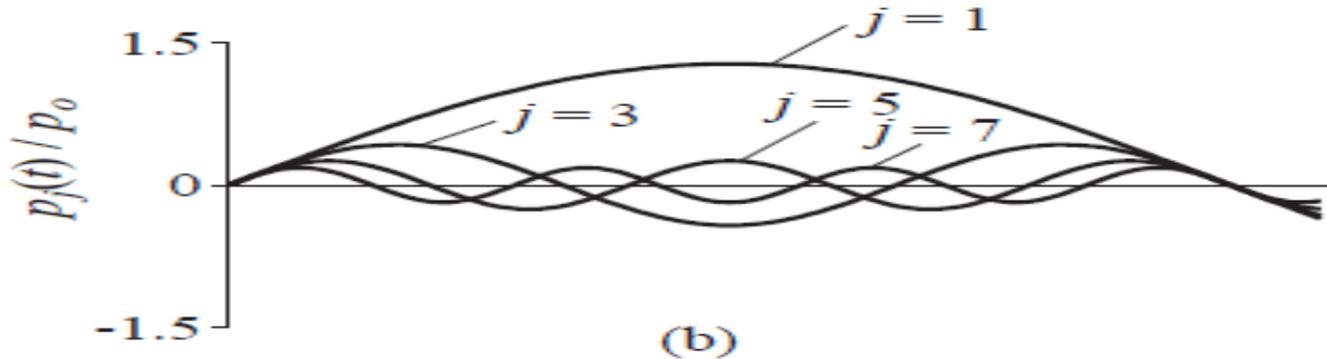
$$b_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \sin(j\omega_0 t) dt \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12.5)$$

وبالتالي تمثل سلاسل فورييه بـ  $p(t)$

$$p(t) = \sum p_j(t) = \frac{4p_0}{\pi} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{j} \sin(j\omega_0 t) \quad (e)$$

الحدود الأربعة الأولى لهذه السلاسل مبينة بالشكل E3.8b حيث تظهر التواترات والسعات النسبية 1,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$  للتوافقيات الأربعة. يظهر الشكل E3.8c الجمع التراكمي لحدود فورييه حيث تعطينا الحدود الأربعة تمثيل معقول للتابع القسري.

عند  $t = T_0/2$  حيث  $p(t)$  غير مستمرة, تتقارب سلاسل فورييه للصفر, والقيمة الوسطية هي  $p(T_0/2)$



$$p(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega_0 t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega_0 t)$$

نحصل على استجابة الجمل وحيدة درجة الحرية للتوابع القسرية بدون تخامد

$$u(t) = \frac{4p_0}{k\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j(1-\beta_j^2)} (\sin j\omega_0 t) \right]$$

نحصل على استجابة الجمل وحيدة درجة الحرية للتوابع القسرية في المعادلة (e) باستبدال المعادلات (b) و (c) و (d) بالمعادلة (3.13.6) للحصول على :

$$u(t) = \frac{4p_0}{k\pi} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{(1-\beta_j^2) \sin(j\omega_0 t) - (2\zeta\beta_j) \cos(j\omega_0 t)}{(1-\beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2} \quad (f)$$

$$\beta_j = j\omega_0/\omega_n = jT_n/T_0 = j/4$$

$$u(t) = (u_{st})_0 \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{(1-\beta_j^2) \sin(j\omega_0 t) - (2\zeta\beta_j) \cos(j\omega_0 t)}{(1-\beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2} \quad (f)$$

يبين الشكل E3.8d

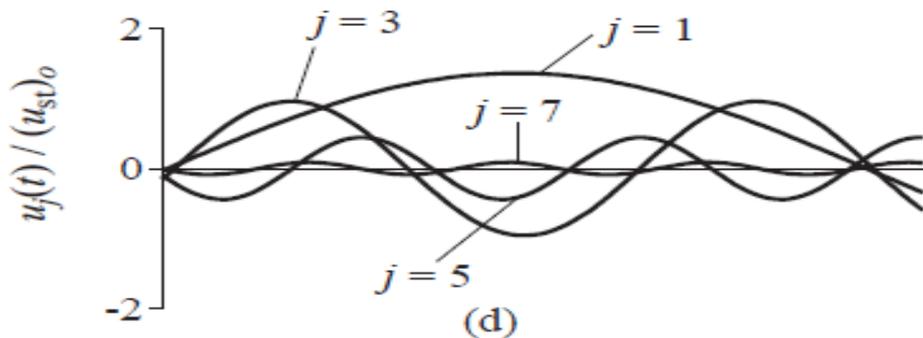
الاستجابات للجمل SDOF

ذات الأذوار الطبيعية  $T_n = T_0/4$

ونسبة التخماد  $\zeta = 5\%$

للحمولات الاربع الاولى في سلاسل فورييه

من المعادلة (e) .



تم كتابة ذلك بحدود مستقلة في المعادلة (f) مع

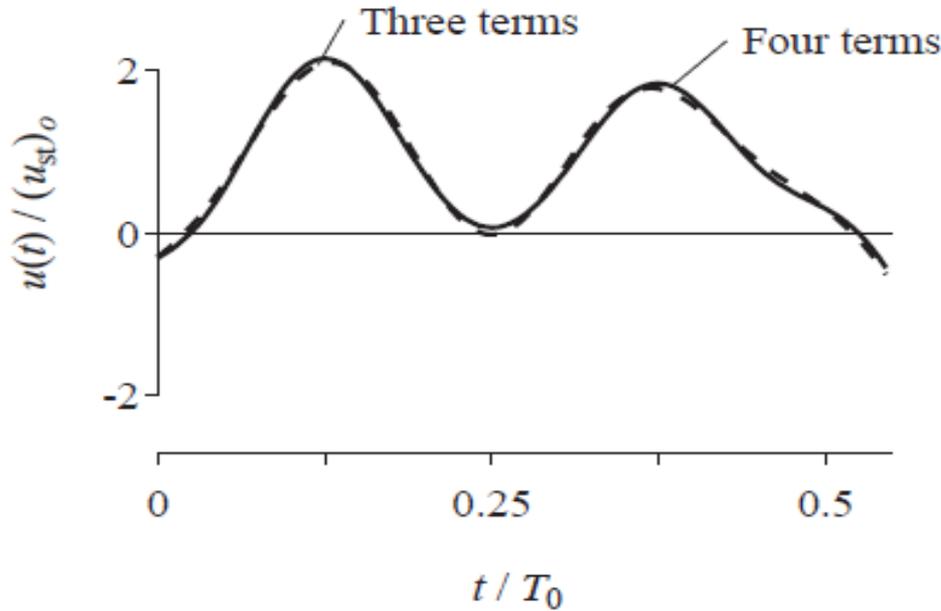
$$\beta_j = j\omega_0/\omega_n = jT_n/T_0 = j/4$$

تظهر السعات النسبية لهذه الحدود حيث لا يوجد اي منها كبير بشكل خاص وذلك لأن قيم  $\beta_j$  لا

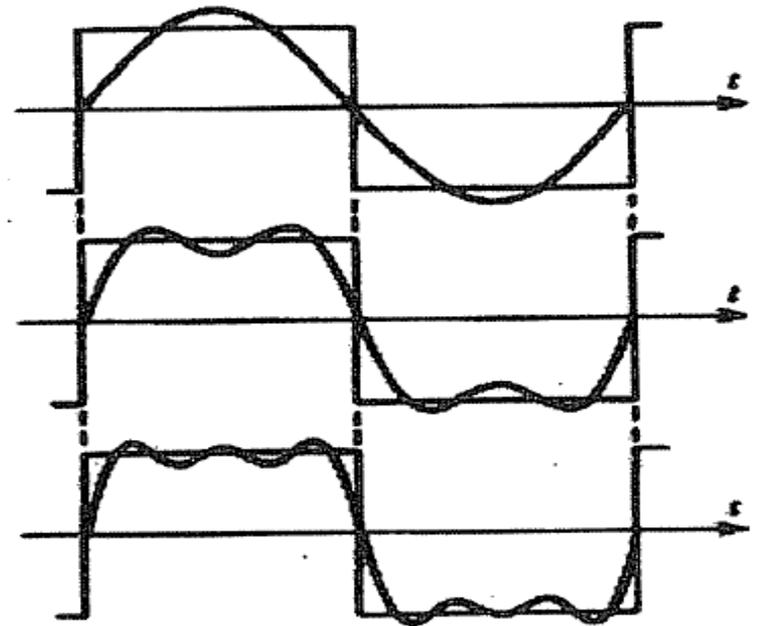
يقترّب اي منها للواحد , لاحظ أن  $\beta_j = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$  وهكذا.

يبين الشكل E3.8e الجمع التراكمي لحدود الاستجابات الفردية من المعادلة (f) حيث أن مساهمة الحدود الاربع تظهر صغيرة .

سوف تكون الحدود الأعلى اصغر وذلك لأن سعات المركبات التوافقية لـ  $p(t)$  سوف تتناقص مع  $j$  و  $\beta_j$  سوف يبتعد عن الواحد



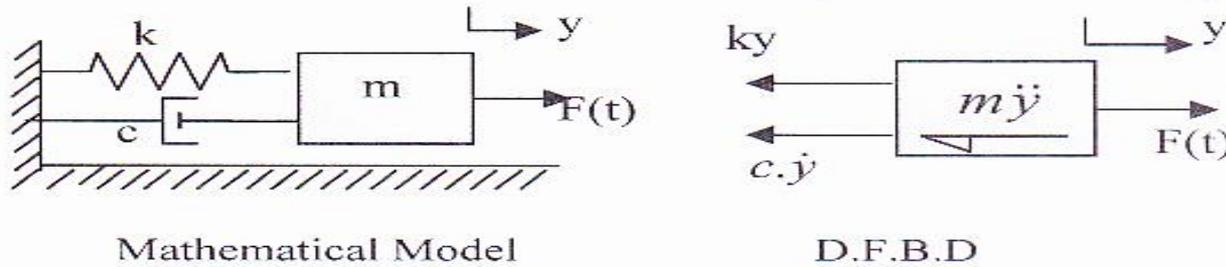
(e)



## استجابة منشأ وحيد درجة الحرية للأحمال الدورية مع تخامد:

### Response of SDOF Structure to Periodic Loading with Damping:

باعتقاد الإطار المبين في الشكل (6-4) والخاضع إلى حمل ديناميكي دوري  $F(t)$ ، وبإدخال تأثير التخماد في التحليل الديناميكي يكون النموذج الرياضي ومخطط الجسم الحرّ الديناميكي DFBD، كما في الشكل (8-4).



الشكل (8-4): النموذج الرياضي ومخطط الجسم الحرّ الديناميكي.

كما مر سابقاً معادلة الحركة:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t)$$

(10-4)

وحلّها يكون من الشكل:

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

(11-4)

وبإهمال الحلّ المتمم واعتماد الحلّ الخاص  $y_p(t)$  في حال تخامد يعطى، كما مر سابقاً بالعلاقة التالية استناداً إلى (26-3).

$$y_p(t) = \frac{F_0}{k} \frac{\sin(n\omega t - n\theta)}{\sqrt{(1 - r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2}}$$

(12-4)

وبالتعويض بتابع القوة الدورية  $F(t)$ ، في هذه الحالة تصبح  $y(t)$ ، كما يلي:

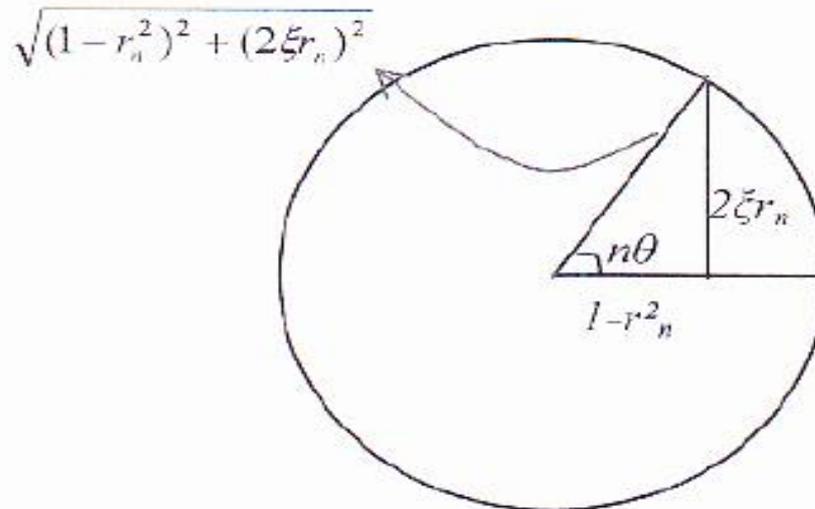
$$y(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{k} \frac{\cos(n\omega.t - n\theta)}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + (2\xi.r_n)^2}} + \frac{b_n}{k} \frac{\sin(n\omega.t - n\theta)}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + (2\xi.r_n)^2}} \right] \quad (13-4)$$

من علاقات المثلثات:

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \sin B \cdot \cos A$$

(14-4)



الشكل (9-4): مخطط يمثل زوايا الطور  $\theta$ .

وبالاعتماد على الشكل (9-4) الذي يمثل زوايا الطور  $\theta$  والعلاقات (3-4) يتم الحصول على ما يلي:

$$\left. \begin{aligned} \sin n\theta &= \frac{2\xi r_n}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2}} \\ \cos n\theta &= \frac{1-r_n^2}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (15-4)$$

بتعويض (14-4) و (15-4) في العلاقة (13-4) وبالإصلاح ينتج الحل العام لمعادلة الاهتزاز:

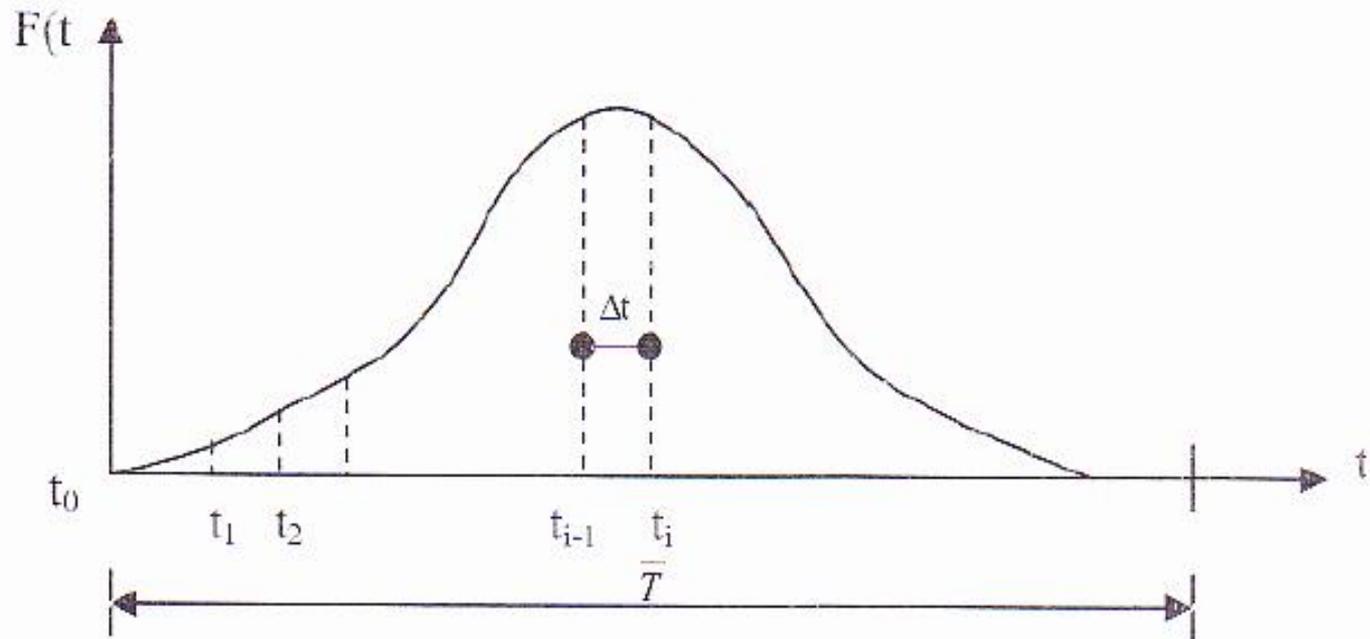
$$y(t) = \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2a_n r_n \xi + b_n (1-r_n^2)}{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \sin n\omega t + \frac{a_n (1-r_n^2) - 2b_n r_n \cdot \xi}{(1-r_n^2)^2 + (2\xi r_n)^2} \cos n\omega t \right] \quad (16-4)$$

يلاحظ أن العلاقة (16-4) تشمل الحالة العامة باعتبار تخامد أو عدم وجود تخامد لأنه لو تم تعويض  $\xi = 0$  في هذه العلاقة يتم الحصول على العلاقة (8-4).

## التحليل باستخدام سلاسل فورييه المتقطعة: Discrete Fourier Analysis

في حال كون التحريض الدوري عشوائياً، كما هو موضح في مخططات التحريض العشوائية العامة الواردة في الملحق رقم ٦ والتي يلاحظ أنه لا يمكن إيجاد تابع واضح لها يمكننا استخدامه في العلاقات السابقة، لذلك فإنه لا بدّ من اللجوء إلى طرق أكثر تطوراً وأكثر عملية وإحدى هذه الطرق هي طريقة سلاسل فورييه Fourier المتقطعة، وهي طريقة متطورة لتحليل المنشآت المعرضة للأحمال الدورية

العشوائية العامة، وهي أيضاً طريقة رياضية لاستخدام سلاسل فورييه Fourier خلال فواصل زمنية محددة، حيث نقوم بتقسيم التحريض الدوري المؤثر في المنشأ إلى أجزاء مستقيمة خلال فواصل زمنية متساوية محددة ومتناهية الصغر بعدد  $N$  وتساوي  $\Delta t = \frac{\bar{T}}{N}$ ، كما هو مبين في الشكل (10-4).



الشكل (10-4): مخطط يمثل استخدام سلاسل فورييه خلال فواصل زمنية محددة.

يبين الشكل (10-4) تابع تحريضٍ دوريٍّ عامٍ وعشوائيٍّ، تمَّ تقسيم التابع إلى عدد  $N$  من الفواصل الزمنية حيث، سيتم تطبيق سلاسل فورييه Fourier خلال كل فاصل زمني على حدة. بالعودة إلى العلاقات (3-4) يتم تمثيل المعادلات بشكل مجموع حدود، وبذلك تتم الاستعاضة عن التكامل بالجمع، كما هو مبين في العلاقات (17-4).

$$a_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \cos n\omega t_j \cdot \Delta t \quad (17-4)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \sin n\omega t_j \cdot \Delta t$$

أما العلاقة (3-4) فيمكن تمثيلها بالعلاقة (18-4)، كما يلي:

$$F(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \quad (18-4)$$

حيث:  $\Delta t$ : تعبر عن الفواصل الزمنية المتساوية،  $\Delta t = T/N$ ،

$N$ : عدد المقاطع ويعطى بالعلاقة  $N=2^M$ ،

$M$ : قيم عددية تتراوح ما بين 1 و 9 ..... وللدقة المقبولة تؤخذ  $M=6$ .

الدور الزمني للتحريض الدوري:  $\Delta t = \bar{T}/N$

وباستخدام علاقات أولر Euler المبينة في المعادلة (19-4) مع المعادلة (17-4). يتم فيها ضم الثابتين في المعادلة (17-4) بالشكل العقدي ومن ثم تُعتمد علاقة جديدة لتابع التحريض حيث يمكن الربط بين الثوابت  $a_n$  و  $b_n$  ، كما في المعادلة (20-4).

$$\cos n\omega t = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2}$$

$$\sin n\omega t = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}$$
(19-4)

ويصبح تابع التحريض:

$$C_n = a_n - ib_n$$

بالاستفادة من العلاقات (17-4) و (19-4) وبالتعويض قيمة كل من  $a_n$  و  $b_n$  في العلاقة (20-4) تصبح هذه العلاقة، كما يلي:

$$C_n = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} F(t_j) \cdot e^{-in\omega t_j} \cdot \Delta t$$
(21-4)

حيث:

$$\left[ \omega = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad \bar{T} = N \cdot \Delta t \quad , \quad t_j = j \cdot \Delta t \right]$$
(22-4)

ويعطى الانتقال  $y(t)$  في هذه الحالة بالعلاقة (24-4) وهي حل المعادلة التفاضلية لمنشأ وحيد درجة الحرية ومعرض لتحريض دوري مع وجود تخامد:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n}{k} \frac{e^{-i(\frac{2\pi n t}{N})}}{(1-r_n^2 + 2i r_n \xi)} \quad (24-4)$$

من العلاقة (24-4) تحسب قيمتين للانتقال: حقيقية وتخيلية، حيث تؤخذ القيمة الحقيقية فقط لأنه غالباً ما تكون القيمة التخيلية صغيرة بالمقارنة مع القيمة الحقيقية، لذلك تعتمد القيمة الحقيقية بالحسابات من أجل تحديد الانتقالات في المنشأ. تستخدم هذه الطريقة، طريقة سلاسل Fourier المتقطعة، بشكل عام عندما تتوفر إمكانية إعداد برنامج كمبيوتر، وذلك بهدف الحصول على قيم دقيقة لتحليل المنشآت الخاضعة لأحمال دورية عامة وعشوائية وبوجود تخامد.

# مثال

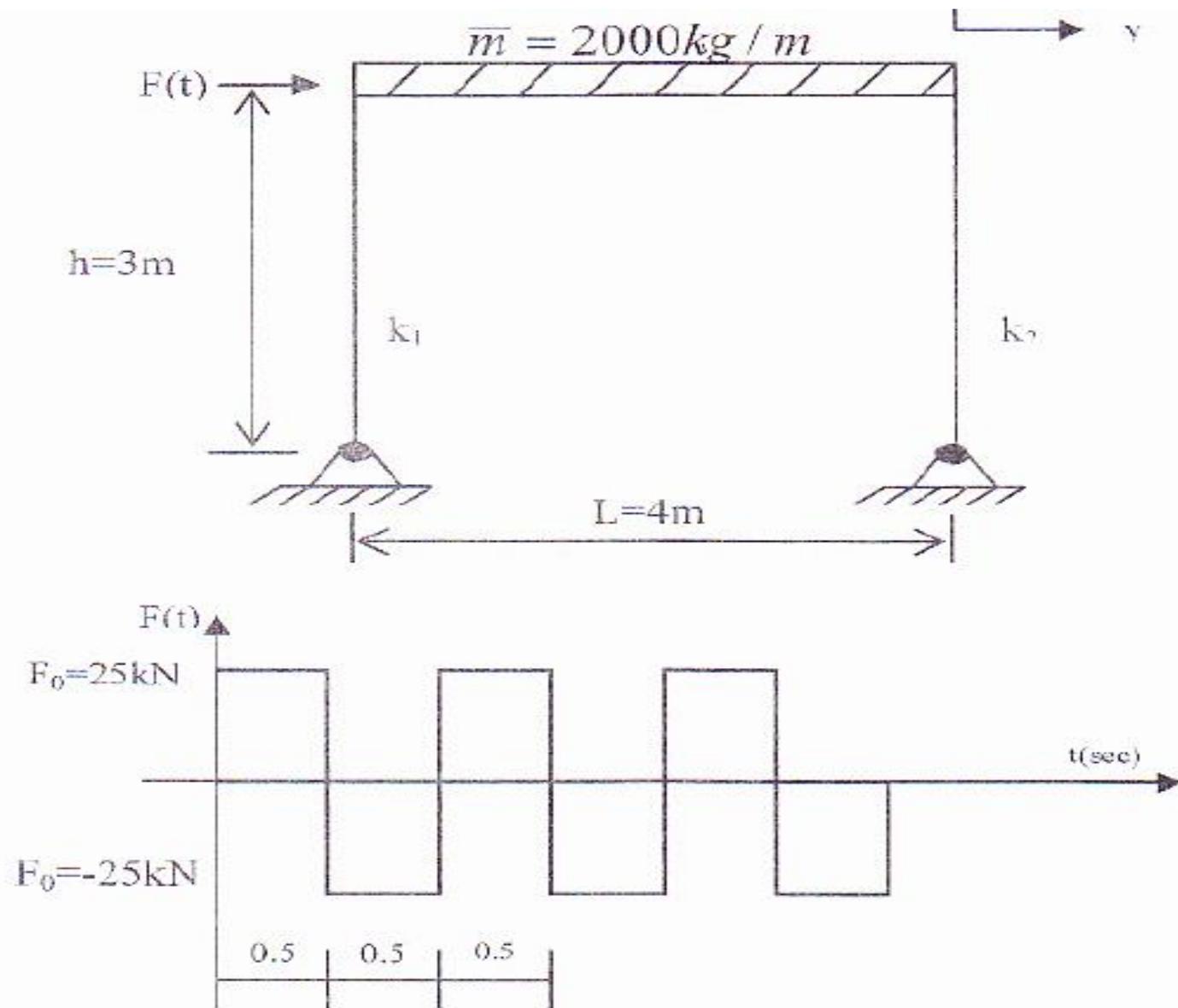
يتعرض الإطار المبين في الشكل إلى قوة أفقية دورية مبينة بالشكل التالي،

بإهمال التخماد وباعتبار خواص المنشأ التالية:  $E=207\text{GPa}$  ،  $I=30 \times 10^6 \text{ m}^4$ .

أ. أوجد الانتقال عند الأزمنة التالية: 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2 sec،

ب. أوجد الانتقال  $y_{\max}$  والزمن الموافق له،

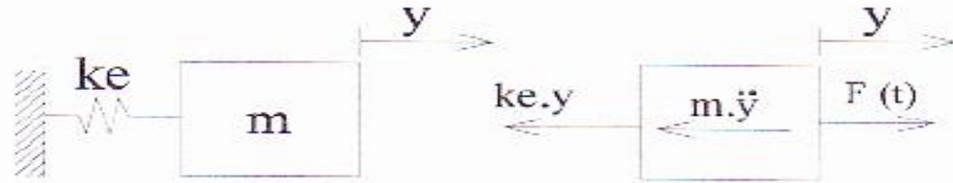
ج. أوجد قوى القص المؤثرة في كل عمود.



# الحل

لإيجاد الانتقالات يجب كتابة معادلة الحركة وإيجاد حلها برسم النموذج

الرياضي ومخطط الجسم الحر الديناميكي.



النموذج الرياضي

مخطط الجسم الحر

ومن أجل حمل دوري يعطى حل معادلة الحركة من العلاقة التالية:

$$y(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(1-r_n^2)} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t]$$

$$k_1 = \frac{3EI}{h^3} = 69 \times 10^4 \text{ N/m}$$

نحسب أولاً الصلابة المكافئة:

$$k_e = 2k_1 = 138 \times 10^4 \text{ N/m}$$

يحسب التواتر الدوراني:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = 13.13 \text{ rad/sec} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.479 \text{ sec}$$

$(2000 * 4)$

يحسب دور التحريض أو الحمل الدوري:

$$\bar{T} = 1 \text{ sec} \Rightarrow \omega = 2\pi = 6.28 \text{ rad/sec}$$

من الشئ

$$r = \frac{\omega}{\omega} = 0.479 \Rightarrow r_n = n \cdot r = 0.479 n$$

نسبة التواتر:

إيجاد ثوابت المعادلة  $a_0, a_n, b_n$  من العلاقات التالية:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+\bar{T}} F(t) \cdot dt$$

حساب  $a_0$ :

يجب إيجاد العلاقة التي تعبر عن  $F(t)$  أي: تابع التحريض، وهنا نجد لها قيمة ثابتة، وتأخذ القيمة  $+25\text{kN}$  من أول دور التحريض حتى منتصفه، وتأخذ القيمة  $-25\text{kN}$

من منتصف دور التحريض حتى نهايته، لذلك سيكون  $a_0$  هو مجموع تكاملين:

$$a_0 = 1 \int_0^{0.5} 25 \times 10^3 dt + 1 \int_{0.5}^1 -25 \times 10^3 dt \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+\bar{T}} F(t) \cos n \omega t dt \quad \text{: حساب } a_n$$

$$a_n = 2 \int_0^{0.5} 25 \times 10^3 \cos(2\pi n t) dt + 2 \int_{0.5}^1 -25 \times 10^3 \cos(2\pi n t) dt \Rightarrow a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+\bar{T}} F(t) \sin n \omega t dt \quad \text{: حساب } b_n$$

ما لذت انك من صيغ  $\left\{ \sin \frac{2\pi}{6} \frac{\pi}{\pi} \right\} = 0$

$$b_n = 2 \int_0^{0.5} 25 \times 10^3 \sin 2\pi n t dt + 2 \int_{0.5}^1 -25 \times 10^3 \sin 2\pi n t dt$$

$$b_n = \frac{50 \times 10^3}{2\pi n} [-\cos \pi n + 1 + \cos 2\pi n - \cos \pi n]$$

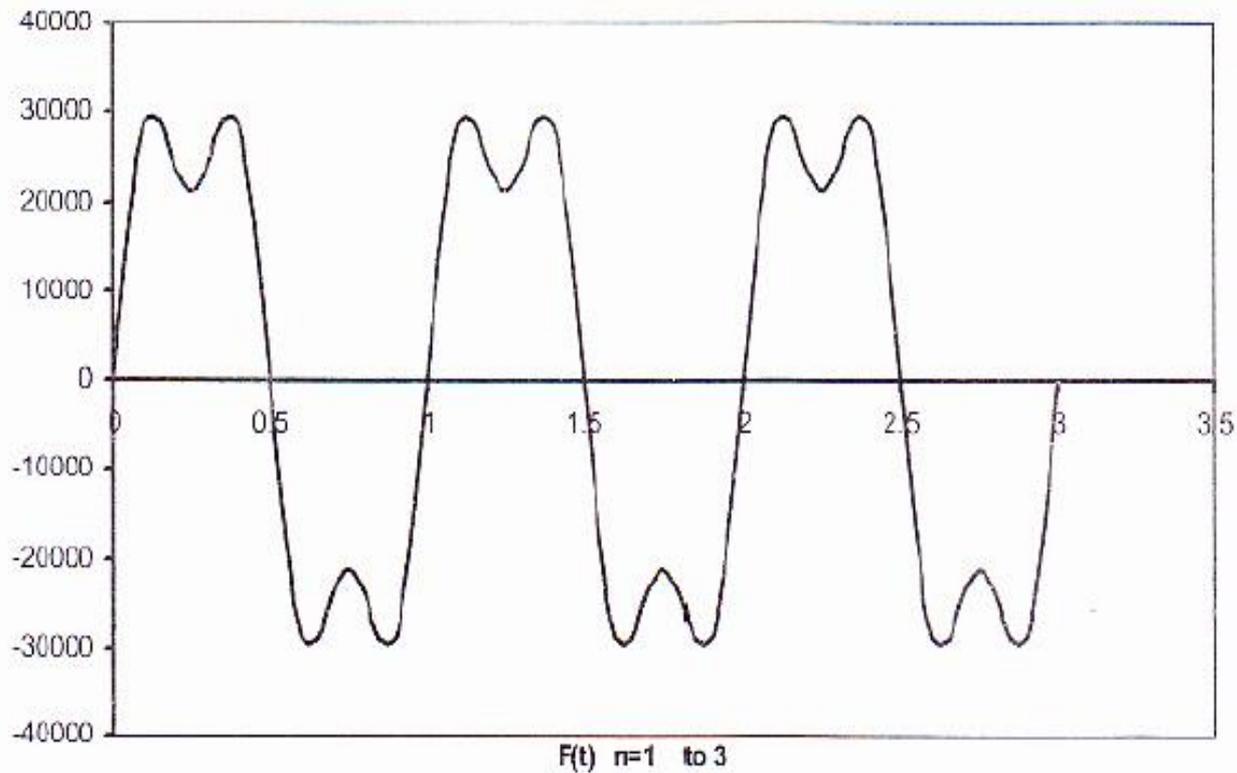
$$b_n = \frac{50 \times 10^3}{\pi n} [-\cos \pi n + 1]$$

هذا، وبتعويض الثوابت  $a_0$ ،  $a_n$ ،  $b_n$  والتي لها واحداث قوى في علاقة التابع الذي يمثل تابع القوة المكافئة للحمل الدوري المطبق على المنشأ المبين بالشكل

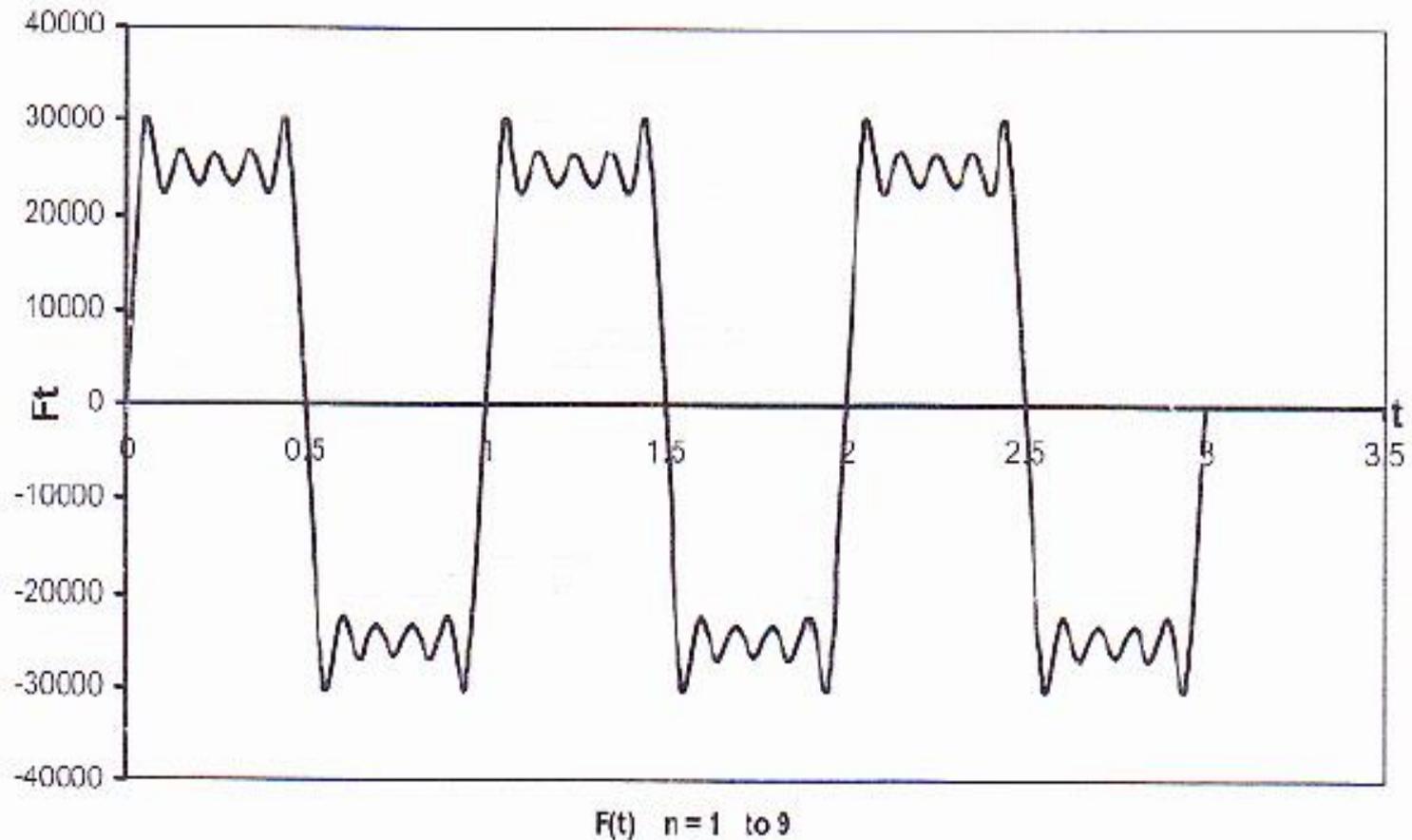
$$F(t) = a_0 + \sum [a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t] \quad \text{المختصر التالي:}$$

وبمقدار ما تزيد عدد الحدود  $n$  نحصل على تحريض مكافئ وأقرب إلى التحريض الدوري الفعلي المطبق على المنشأ، فمثلاً:

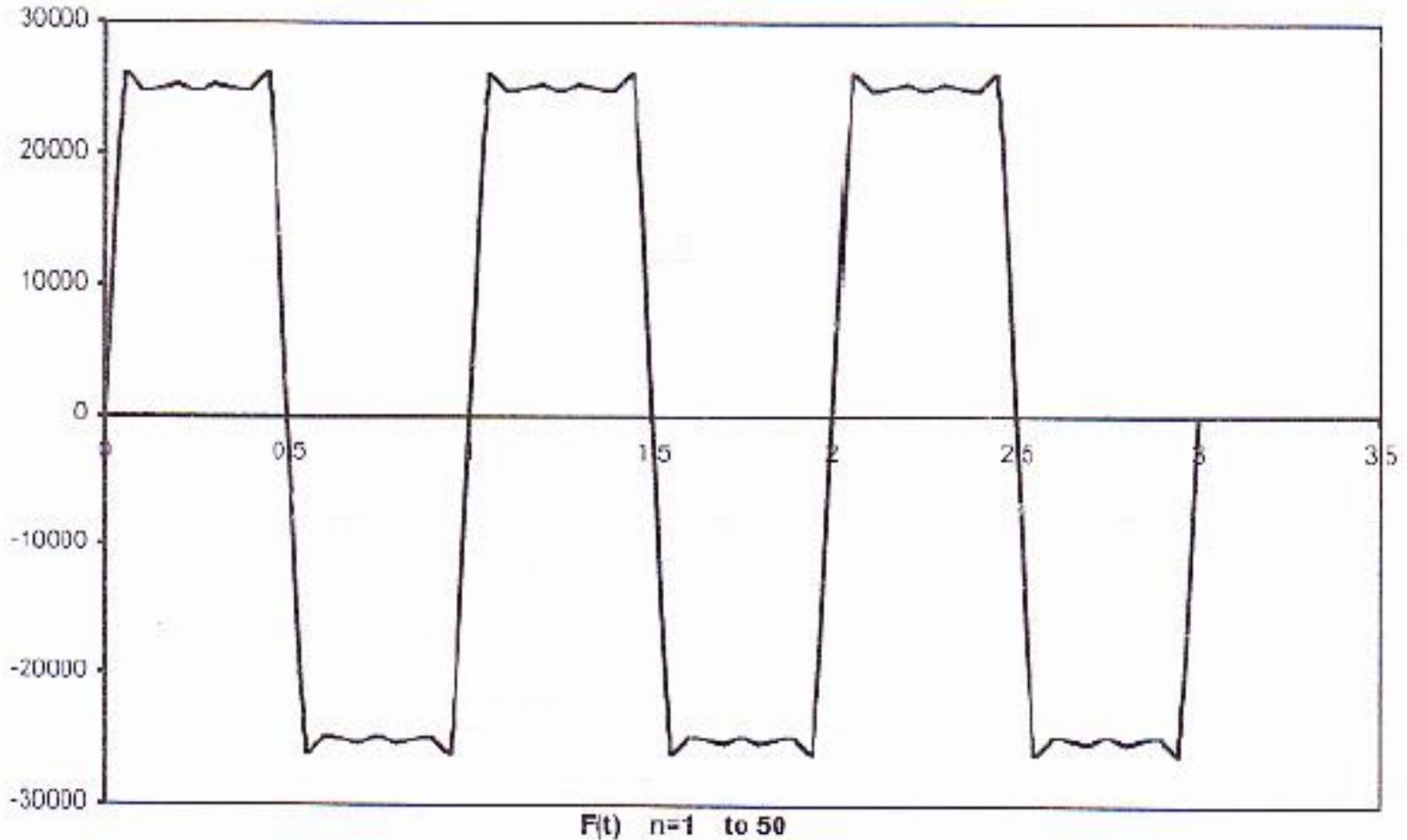
أ. عندما يكون  $n=3$  يكون تابع التحريض المبين في الشكل التالي،



ب. عندما يكون  $n=9$  يكون تابع التحريض المبين في الشكل التالي،



ج. عندما يكون  $n=50$  يكون تابع التحريض المبين في الشكل التالي،



ويلاحظ من الحالة ج أنه عندما أصبح عدد الحدود  $n=50$  نحصل على تحريض مكافئ وأقرب إلى التحريض الدوري الفعلي المطبق على المنشأ من الحالات الأخرى، وينطبق هذا المعيار على إيجاد قيمة الاستجابة الناتجة عن هذا التحريض. يتم تعويض قيم الثوابت في معادلة الاستجابة أو الحل،  $y(t)$ :

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(1-r_n^2)} [b_n \sin n\omega.t]$$

معادلة الاستجابة أو الحل الانتقال  $y(t)$ :

$$y(t) = \frac{50 \times 10^3}{k \cdot \pi} \sum \left[ \frac{1}{n(1-r_n^2)} (1 - \cos \pi.n) \sin 2\pi.nt \right]$$

يلاحظ من شكل المعادلة وبوجود  $(1 - \cos \pi \cdot n)$  أنه يتم الحصول على حدود معدومة في حال تم أخذ  $n$  عدد زوجي عندئذ ستكون  $(1 - \cos \pi \cdot n) = 0$  لذلك تعوض  $n$  بالعلاقة كقيم فردية فقط، ومن ثم سيكون  $(1 - \cos \pi \cdot n) = 2$  دائماً. بتعويض قيم  $t$  بعلاقة الانتقال  $y(t)$  وباعتبار أن  $n=9$  يتم الحصول على قيم الانتقالات التالية:

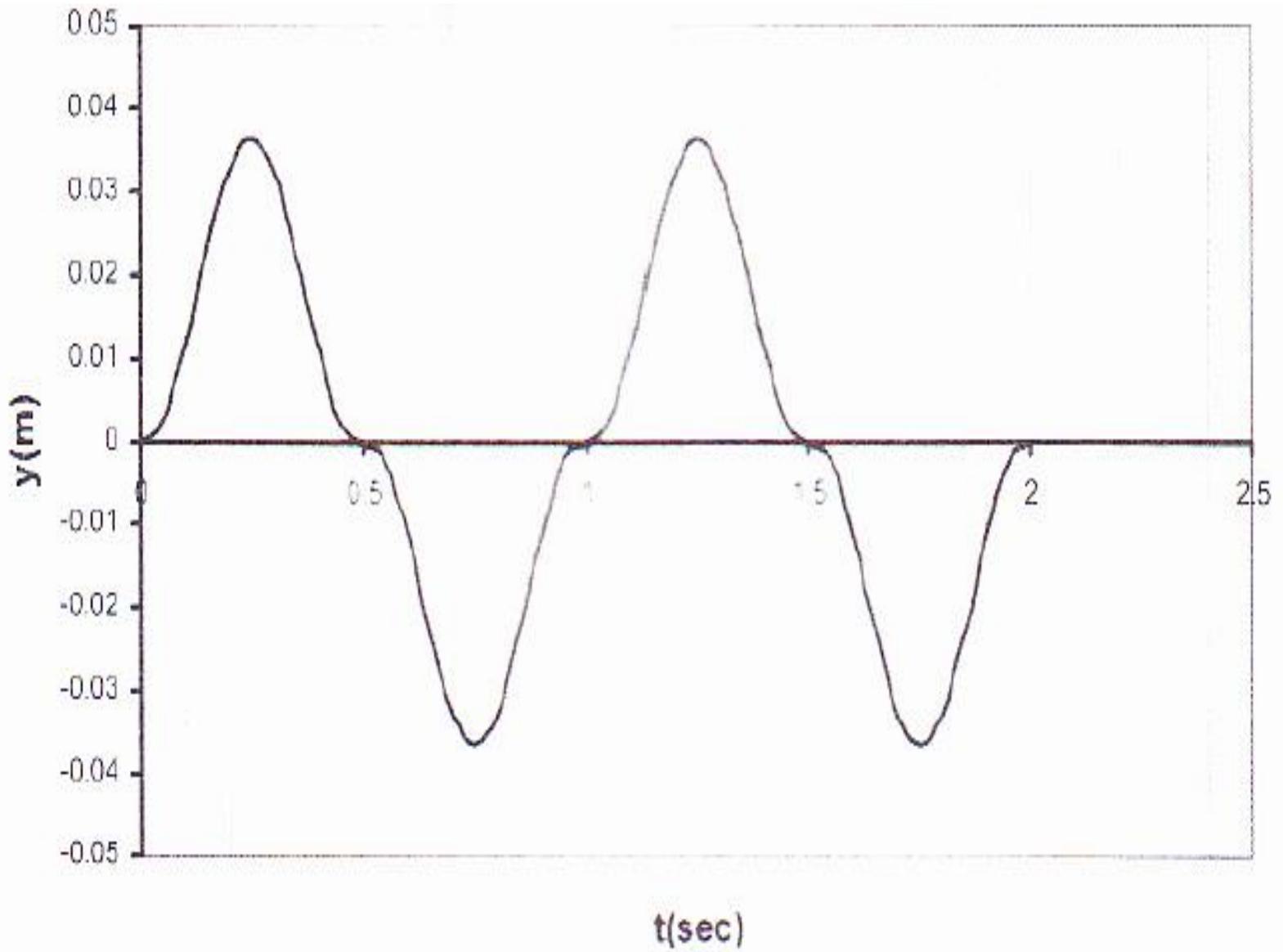
$$t = 0 \text{ sec} \Rightarrow y(t) = 0 \quad ; \quad t = 0.25 \text{ sec} \Rightarrow y(t) = 0.0364 \text{ m}$$

$$t = 0.5 \text{ sec} \Rightarrow y(t) = 0 \quad ; \quad t = 0.75 \text{ sec} \Rightarrow y(t) = -0.0364 \text{ m}$$

$$t = 1 \text{ sec} \Rightarrow y(t) = 0 \quad ; \quad t = 2 \text{ sec} \Rightarrow y(t) = 0$$

أما قيمة الانتقال الأعظمي  $y_{\max}$  فهي  $y_{\max} = 0.0364 \text{ m}$  عند الزمن  $t = 0.25 \text{ sec}$ ،

ويتم التأكد من هذه القيمة برسم منحنى الاهتزاز وإيجاد قيمة  $y_{\max}$  عند الزمن  $t = 0.25 \text{ sec}$  تقريباً، لماذا يكون الانتقال معدوماً عند الزمن  $t = 2 \text{ sec}$  ؟



إيجاد قوة القصّ الأعظمية في العمود الواحد:

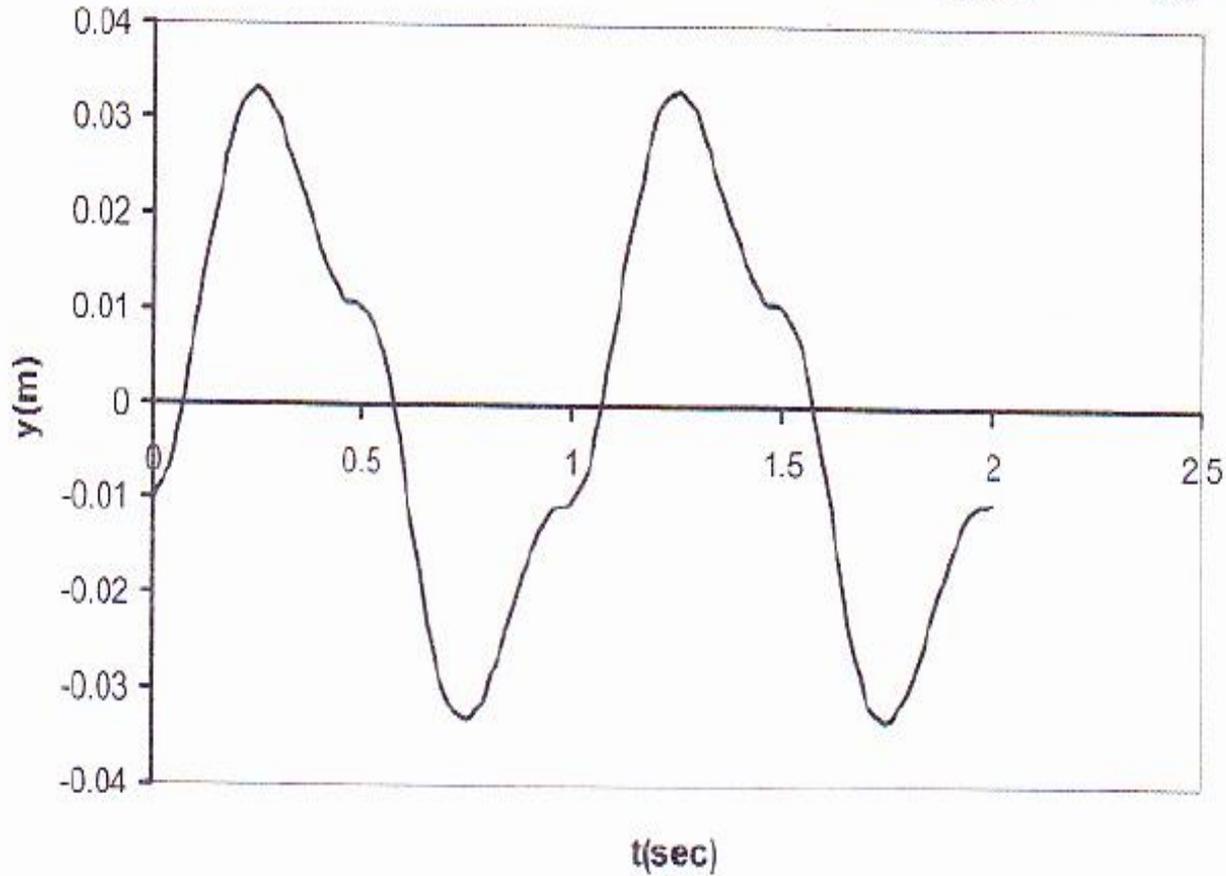
$$V_{\max} = k \cdot y_{\max}; V_{\max} = 69 \times 10^4 \times 0.0364 = 25.1 \text{ kN}$$

إذا اعتبرنا نسبة تخامد  $\xi = 20\%$  تكون عندها قيمة الانتقال الأعظمي  $y_{\max}$  مساوية

للقيمة  $y_{\max} = 0.033 \text{ m}$  عند الزمن  $t = 0.25 \text{ sec}$ ، ويتم التأكد من هذه القيمة برسم

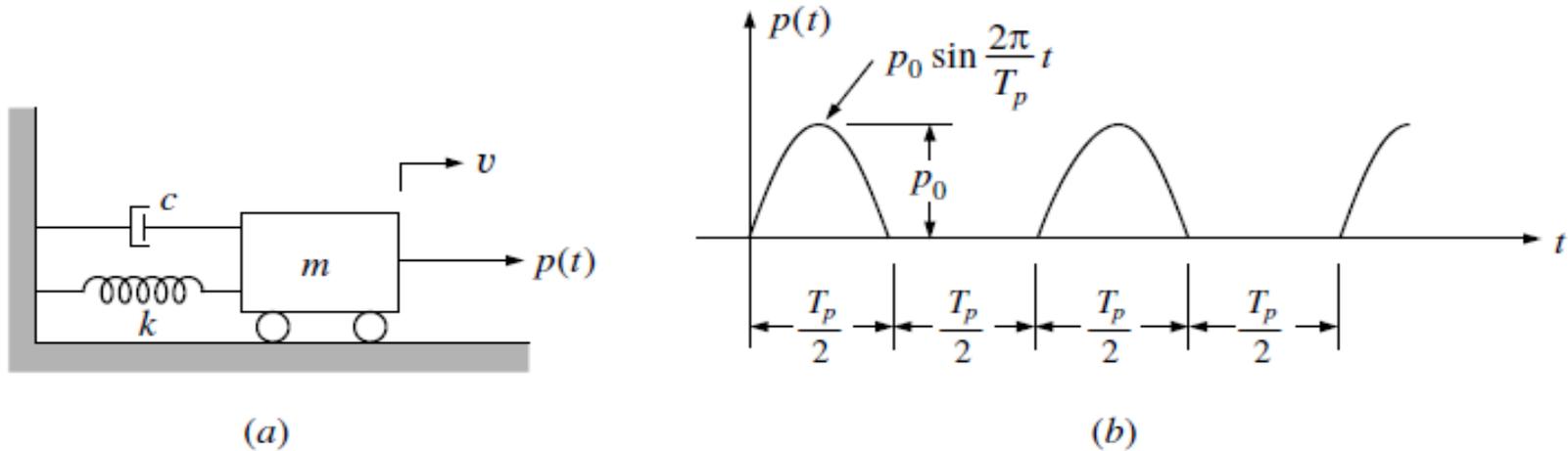
منحني الاهتزاز وإيجاد قيمة  $y_{\max}$  عند الزمن  $t = 0.25 \text{ sec}$  تقريباً، وتكون قوة القصّ

الأعظمية في العمود مساوية للقيمة  $V_{max} = 22.8\text{kN}$ ، أي: بفرق نسبي بمقدار 9%  
بالنسبة إلى الحالة بدون تخامد.



## Example

As an example of the response analysis of a periodically loaded structure, consider the system and loading shown in Fig. The loading in this case consists of the positive portion of a simple sine function. The Fourier coefficients of are found by using



Example analysis of response to periodic loading: (a) SDOF system; (b) periodic loading.

## solution

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t$$

$$\bar{\omega}_n = n \bar{\omega}_1 = n \frac{2\pi}{T_p}$$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p/2} p_0 \sin \frac{2\pi t}{T_p} dt = \frac{p_0}{\pi} \\
 a_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p/2} p_0 \sin \frac{2\pi t}{T_p} \cos \frac{2\pi n t}{T_p} dt = \begin{cases} 0 & n \text{ odd} \\ \frac{p_0}{\pi} \left[ \frac{2}{1-n^2} \right] & n \text{ even} \end{cases} \quad (\text{a}) \\
 b_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p/2} p_0 \sin \frac{2\pi t}{T_p} \sin \frac{2\pi n t}{T_p} dt = \begin{cases} \frac{p_0}{2} & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

the periodic loading:

$$p(t) = \frac{p_0}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \sin \bar{\omega}_1 t - \frac{2}{3} \cos 2\bar{\omega}_1 t - \frac{2}{15} \cos 4\bar{\omega}_1 t - \frac{2}{35} \cos 6\bar{\omega}_1 t + \dots \right) \quad (\text{b})$$

in which  $\bar{\omega}_1 = 2\pi / T_p$ .

If it is now assumed that the structure of Fig. is undamped, and if, for example, the period of loading is taken as four-thirds the period of vibration of the structure,

$$\frac{T_p}{T} = \frac{\omega}{\bar{\omega}_1} = \frac{4}{3} \qquad \beta_n = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega} = \frac{3}{4} n \qquad (c)$$

The total periodic response of the undamped structure then can be expressed as the sum of the individual responses to the loading terms as follows:

$$v(t) = \frac{1}{k} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{1 - \beta_n^2} \right] (a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t) \right\}$$

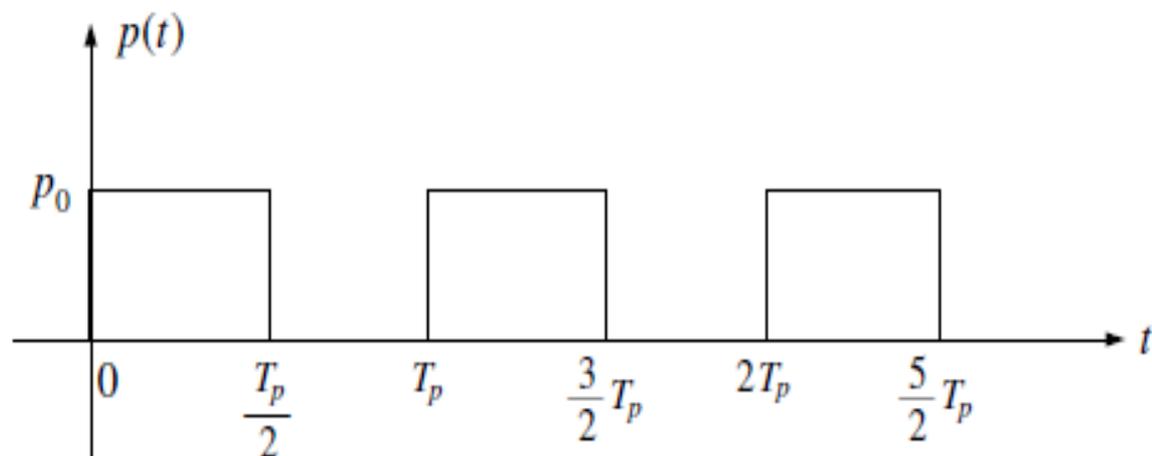
the steady-state response given by Eq. (4-15) becomes

$$v(t) = \frac{p_0}{k \pi} \left( 1 + \frac{8\pi}{7} \sin \bar{\omega}_1 t + \frac{8}{15} \cos 2\bar{\omega}_1 t + \frac{1}{60} \cos 4\bar{\omega}_1 t + \dots \right) \qquad (d)$$

## Example

Consider the periodic loading shown in Fig. The corresponding Fourier coefficients  $P_n$  to be used in the SDOF response expression are

$$P_n = \frac{p_0}{T_p} \int_0^{T_p/2} \exp\left(-i \frac{2\pi n}{T_p} t\right) dt$$



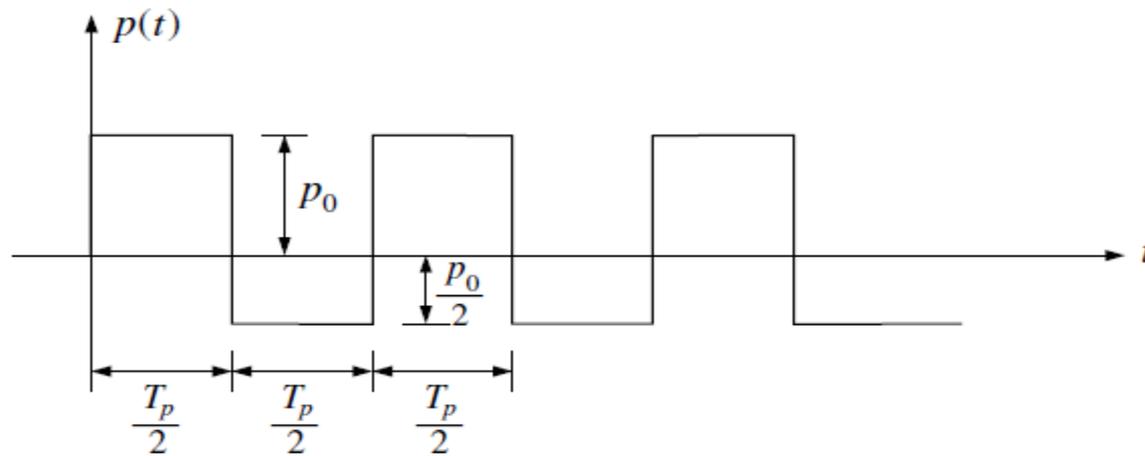
Rectangular-pulse-type periodic loading.

or

$$P_n = \frac{p_0}{T_p} \left( \frac{T_p}{i 2\pi n} \right) \left[ \exp\left(-i \frac{2\pi n}{T_p} t\right) \right]_0^{T_p/2} = \begin{cases} p_0/2 & n = 0 \\ 0 & n \text{ odd} \\ -p_0 i / \pi n & n \text{ even} \end{cases}$$

# Example

Express the periodic loading shown in Fig. as a Fourier series. Thus, determine the coefficients  $a_n$  and  $b_n$  for the periodic loading given by



$$p(t) = \begin{cases} P_0 & , 0 < t < \frac{T_p}{2} \\ -\frac{1}{2} P_0 & , \frac{T_p}{2} < t < T_p \end{cases}$$

From eqs. :  $p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T_p} t$ , where

$$a_0 = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} p(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P} p(t) \cos \frac{2\pi n}{T_P} t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P} p(t) \sin \frac{2\pi n}{T_P} t dt$$

Eq. (4-3)

$$\therefore a_0 = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P/2} p_0 dt + \int_{T_P/2}^{T_P} \left(-\frac{1}{2} p_0\right) dt = \frac{p_0}{T_P} \cdot \frac{T_P}{2} - \frac{p_0}{2T_P} \left(T_P - \frac{T_P}{2}\right) = \frac{p_0}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P/2} p_0 \cos \frac{2\pi n}{T_P} t dt + \frac{2}{T_P} \int_{T_P/2}^{T_P} \left(-\frac{1}{2} p_0\right) \cos \frac{2\pi n}{T_P} t dt$$

$$a_n = \frac{2p_0}{T_P} \left[ \frac{T_P}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{T_P} t \right]_0^{T_P/2} - \frac{p_0}{T_P} \left[ \frac{T_P}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{T_P} t \right]_{T_P/2}^{T_P} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_P} \int_0^{T_P/2} P_0 \sin \frac{2\pi n}{T_P} t dt + \frac{2}{T_P} \int_{T_P/2}^{T_P} \left(-\frac{1}{2} P_0\right) \sin \frac{2\pi n}{T_P} t dt$$

$$b_n = \frac{2P_0}{T_P} \left[ -\frac{T_P}{2\pi n} \cos \frac{2\pi n}{T_P} t \right]_0^{T_P/2} - \frac{P_0}{T_P} \left[ -\frac{T_P}{2\pi n} \cos \frac{2\pi n}{T_P} t \right]_{T_P/2}^{T_P}$$

$$b_n = \frac{P_0}{2\pi n} \left\{ 2 \left[ 1 - (-1)^n \right] + 1 - (-1)^n \right\}$$

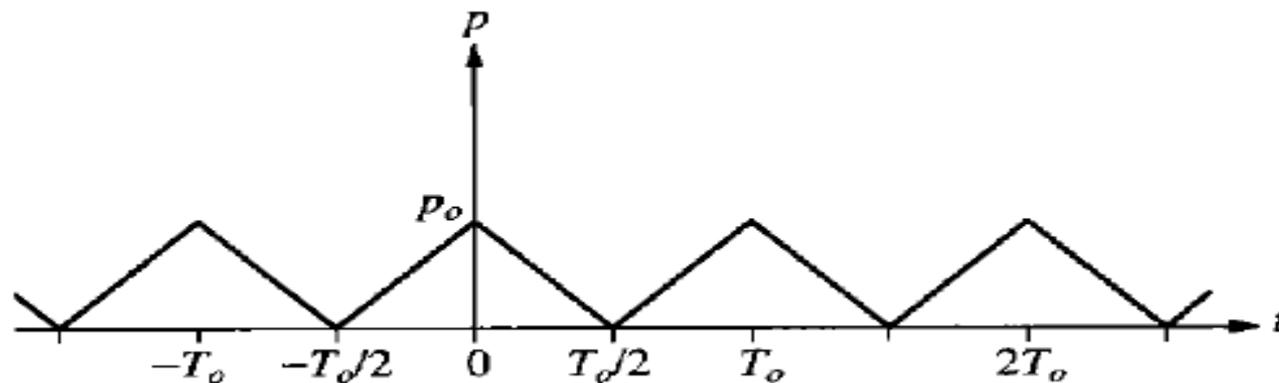
$$b_n = \frac{3P_0}{2\pi n} \left[ 1 + (-1)^{n+1} \right] = \begin{cases} \frac{3P_0}{\pi n} & , \quad n = 1, 3, \dots \\ 0 & , \quad n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

$$\blacktriangleright a_0 = \frac{P_0}{4}, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{3P_0}{\pi n} \quad n = 1, 3, \dots$$

$$P(t) = \frac{P_0}{4} + \frac{3P_0}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi n}{T_P} t$$

## Example

An SDF system with natural period  $T_n$  and damping ratio  $\zeta$  is subjected to the periodic force shown in Fig. P3.24 with an amplitude  $p_o$  and period  $T_0$ .



- Expand the forcing function in its Fourier series.
- Determine the steady-state response of an undamped system. For what values of  $T_0$  is the solution indeterminate?
- For  $T_0/T_n = 2$  determine and plot the response to individual terms in the Fourier series. How many terms are necessary to obtain reasonable convergence of the series solution?

## solution

(a)  $p(t)$  is an even function:

$$p(t) = p_o \left( 1 - \frac{2}{T_0} t \right) \quad 0 \leq t \leq T_0/2 \quad (\text{a})$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} p_o \left( 1 - \frac{2}{T_0} t \right) dt \\ &= \frac{p_o}{2} \end{aligned} \quad (\text{b})$$

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t) \cos(j\omega_0 t) dt \\ &= \frac{4p_o}{T_0} \int_0^{T_0/2} \left( 1 - \frac{2}{T_0} t \right) \cos(j\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4p_0}{T_0} \left\{ \frac{1}{j\omega_0} \left[ \sin(j\omega_0 t) \right]_0^{T_0/2} - \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} t \cos(j\omega_0 t) dt \right\} \\
&= -\frac{8p_0}{T_0^2} \int_0^{T_0/2} t \cos\left(\frac{2\pi j t}{T_0}\right) dt \\
&= -\frac{4p_0}{\pi j T_0} \left\{ \left[ t \sin\left(\frac{2\pi j}{T_0} t\right) \right]_0^{T_0/2} + \frac{T_0}{2\pi j} \left[ \cos\left(\frac{2\pi j}{T_0} t\right) \right]_0^{T_0/2} \right\} \\
&= -\frac{2p_0}{\pi^2 j^2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi j}{T_0} t\right) \right]_0^{T_0/2} \\
&= -\frac{2p_0}{\pi^2 j^2} [\cos(\pi j) - 1]
\end{aligned}$$


Because of the  $j^4$  in the denominator of the series, two terms are enough to obtain reasonable convergence of the series solution.

$$\therefore a_j = \begin{cases} \frac{4p_o}{\pi^2 j^2} & j = 1,3,5,\dots \\ 0 & j = 2,4,6,\dots \end{cases} \quad (c)$$

$$b_n = 0 \text{ because } p(t) \text{ is an even function} \quad (d)$$

Thus the Fourier series representation of  $p(t)$  is

$$p(t) = \frac{p_o}{2} + \frac{4p_o}{\pi^2} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos(j\omega_0 t) \quad (e)$$

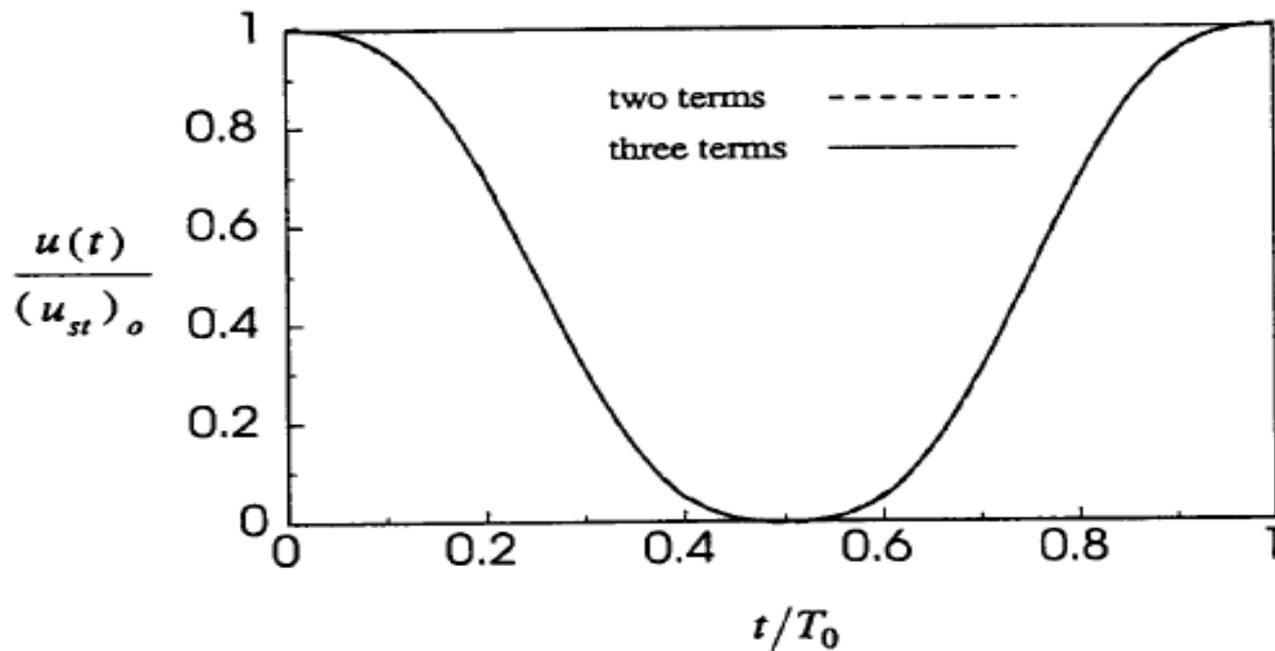
(b) The steady-state response of an undamped system is obtained by substituting Eqs. (b), (c) and (d) in Eq. (3.13.6) to obtain

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{j^2 (1 - \beta_j^2)} \cos(j\omega_0 t) \quad (f)$$

indeterminate when  $\beta_j = 1$ ; corresponding values of  $T_0$  are  $T_n, 3T_n, 5T_n$ , etc.

(c) For  $T_0/T_n = 2$ ,  $\beta_j = j\omega_0/\omega_n = jT_n/T_0 = j/2$  and Eq. (f) becomes

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{j^2(4-j^2)} \cos\left(\frac{2\pi jt}{T_0}\right)$$



The end